Tsallis q-divergence :

$$D_q(T,P) = \frac{1}{q(1-q)}\left[1 - \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}\right] \qquad 0 \leq q \leq 1$$

Model manifold :

$$\mathcal{M} = \left\{ P \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{I \times J \times K} \;\middle|\; P_{ijk} = \sum_{r=1}^{R} A_{ir} B_{jr} C_{kr}, \ \sum_{ijk} P_{ijk} = 1, \ A_{ir}, B_{jr}, C_{kr} \geq 0 \right\}$$

$$\cup \quad Q_{ijkr} = A_{ir} B_{jr} C_{kr}$$

$$\underset{P \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmin}} \; D_q(T,P)$$

$$= \underset{P \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmin}} \; \frac{-1}{1-q} \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}$$

$$= \underset{P \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmin}} \; \frac{1}{q-1} \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}$$

$$= \underset{P \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmin}} \; \frac{1}{q-1} \log \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}$$

$$= \underset{P \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmin}} \; L_q(P)$$

where $L_q(P) := \dfrac{1}{q-1} \log \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}$

$$L_\beta(P) = \frac{1}{\beta-1}\log\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} P_{ijk}^{1-\beta}$$

$$= \frac{1}{\beta-1}\log\sum_{ijk}\underbrace{T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}}_{t_u}\frac{P_{ijk}^{1-\beta}}{F_{ijk}} \qquad \text{s.t.} \quad F\in\mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}=\left\{F\in\mathbb{R}_{\geq 0}^{I\times J\times K} \;\middle|\; \sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}=1\right\}$$

$$\leq \frac{1}{\beta-1}\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log\frac{P_{ijk}^{1-\beta}}{F_{ijk}} \qquad = \bar{L}(P,F)$$

$$= \frac{1}{\beta-1}\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log P_{ijk}^{1-\beta} - \frac{1}{\beta-1}\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log F_{ijk}.$$

$$= -\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log P_{ijk} - \frac{1}{\beta-1}\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log F_{ijk}.$$

$$= -\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log\sum_r Q_{ijkr} - \frac{1}{\beta-1}\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log F_{ijk}.$$

$$= -\sum_{ijk} T_{ijk}^{\beta} F_{ijk}\log\sum_r \Phi_{ijkr}\frac{Q_{ijkr}}{\Phi_{ijkr}} - \qquad =$$

where

$\Phi\in D$

$$D=\left\{\Phi \;\middle|\; \sum_r \Phi_{ijkr} = \overset{T_{ijk}}{\beta}\right\}$$

$$\leq -\sum_{ijkr} T_{ijk}^{\beta\,\mathrm{All}} F_{ijk}\Phi_{ijkr}\log\frac{Q_{ijkr}}{\Phi_{ijkr}} - \qquad = \qquad = \bar{\bar{L}}(P,F,\Phi$$

[1] M-step

$$Q^* = \mathrm{argmin}\ \bar{\bar{L}}_Q (Q, F, \Phi)$$

$$\mathcal{L} = - \sum_{ijk} \sum_r \underbrace{T_{ijk}^{z} F_{ijk} \Phi_{ijk}}_{=: M_{ijk}} \log \overset{A_{ir} B_{jr} C_{kr}}{\cancel{Q_{ijk}}} - \lambda \left(\sum_{ijkr} A_{ir} B_{jr} C_{kr} - 1 \right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{ir}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_{jr}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_{kr}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_{ir} = \frac{\sum_{jk} M_{ijkr}}{\left(\sum_{ijkr} M_{ijkr}\right)^{1/3} \left(\sum_{ijk} M_{ijkr}\right)^{1-\frac{1}{3}}}$$

$$B_{jr} = \frac{\sum_{ik} M_{ijkr}}{\left(\sum_{ijkr} M_{ijkr}\right)^{1/3} \left(\sum_{ijk} M_{ijkr}\right)^{1-\frac{1}{3}}}$$

$$C_{kr} = \frac{\sum_{ij} M_{ijkr}}{\left(\sum_{ijkr} M_{ijkr}\right)^{1/3} \left(\sum_{ijk} M_{ijkr}\right)^{1-\frac{1}{3}}}$$

$$\therefore\ L_q(\underset{Q}{P}) \leq \bar{L}_q(\underset{Q}{P}, F) \leq \bar{\bar{L}}_q(\underset{\overset{Q}{\geq}}{P}, F, \underset{=}{\Phi})$$

EI-step

$$\boxed{1}\ \overset{2}{\ }\ \Phi^* = \underset{\Phi \in D}{\operatorname{argmin}}\ \bar{\bar{L}}_q(P, F, \Phi)$$

$$\Phi^*_{ijkr} = \frac{1}{P_{ijk}} Q_{ijkr}$$

<u>Proof.</u>

$$\boxed{2}\quad \sum_{ijkr} T^q_{ijk} F_{ijk} \Phi_{ijk} \log \frac{Q_{ijkr}}{\Phi_{ijk}}$$

$$= \sum_{ijk} \sum_r T^q_{ijk} F_{ijk} \frac{Q_{ijkr}}{P_{ijk}} \log \frac{\cancel{Q_{ijkr}}}{\cancel{Q_{ijkr}}} P_{ijk}$$

$$= \sum_{ijk} \sum_r T^q_{ijk} F_{ijk} \frac{Q_{ijkr}}{P_{ijk}} \log P_{ijk}$$

$$= \sum_{ijk} T^q_{ijk} F_{ijk} \log P_{ijk}.$$

$$\bar{\bar{L}}_q(P, F, \Phi^*) = \bar{L}_q(Q, F)$$

$\boxed{3}$ ~~$\overline{L}_q$~~ F2-step

$$F^{*} = \underset{F \in R}{\operatorname{argmin}}\ \overline{L}_q(Q, F)$$

$$F^{*}_{ijk} = \cancel{\frac{\left(\sum_r Q_{ijkr}\right)^{1-\alpha}}{\sum_{ijk} T_{ijk}^{\alpha}}} = \frac{P_{ijk}^{1-q}}{\sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}}$$

proof

$$\overline{L}_q(Q, F^{*}) = \frac{1}{q-1} \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} F_{ijk} \log \frac{P_{ijk}^{1-q}}{F_{ijk}}$$

$$= \frac{1}{q-1} \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} \frac{P_{ijk}^{1-q}}{\sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}} \log \frac{\cancel{P_{ijk}^{1-q}}}{\cancel{P_{ijk}^{1-q}}} \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}$$

$$= \frac{1}{q-1} \frac{\sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}}{\sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}} \log \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q}$$

$$= \frac{1}{q-1} \log \sum_{ijk} T_{ijk}^{q} P_{ijk}^{1-q} = L_q(Q).$$

Algorithm

\# M-step $\quad M_{ijk} \leftarrow T_{ijk}^{\alpha} F_{ijk} \Phi_{ijkr}$

$A_{ir} \leftarrow$ ______

$B_{jr} \leftarrow$

$C_{kr} \leftarrow$

$Q_{ijkr} \leftarrow A_{ir} B_{jr} C_{kr}, \quad P_{ijk} \leftarrow \sum_r Q_{ijkr}$

\# E1-step

$$\Phi_{ijkr} \leftarrow \frac{Q_{ijkr}}{P_{ijk}}$$

\# E2-step

$$F_{ijk} \leftarrow \frac{P_{ijk}^{1-\alpha}}{\sum_{ijk} T_{ijk}^{\alpha} P_{ijk}^{1-\alpha}}$$